LYCÉE PILOTE TUNIS MR MASMOUDI RADHOUANE

SÉRIE LIMITES - CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

Classes : 3° maths et sc exp

Exercice 1 :

1) Soit la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{x^3-7x-6}{x^2-x-6}$.
   a) Justifier que h est continue sur son ensemble de définition.
   b) Calculer la limite de h(x) en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c) Montrer que h admet un prolongement par continuité en (-2) et 3 que l'on précisera.

2) Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2+x+1}+x-3} \; si \, x\neq 1 \\ g(1)=a \; avec \; a \in \mathbb{R} \end{cases}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g .
b) Déterminer le réel a pour que g soit continue en 1.

3) Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=h(x), \text{ si } x<-2 \\ f(x)=x^3-2x+3, \text{ si } -2\leq x\leq 1 \\ f(x)=g(x), \text{ si } x>1 \end{cases}$

   a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Etudier la continuité de f en (-2) et en 1.
   c) Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où f est continue.
   d) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans [-2,0] au moins une solution α.
   e) Donner un encadrement du réel α d'amplitude 0,1.

Exercice 2 :

Soit la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2-4}, si \, x<-2 \\ f(x)=\dfrac{2-2|x-1|}{x^2+x}, si -2\leqslant x<1 \\ f(x)=\sqrt{4x^2+x-5}-x, si \, x\geqslant 1 \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier la continuité de f en -2 et en 1.
3) Etudier la limite de f en -1 . Interpréter le résultat graphiquement.
4) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
5) Calculer la limite de f(x) en $-\infty$. Interpréter le résultat graphiquement.
6) Calculer la limite de f(x) en $+\infty$.
7) Montrer que la droite $\Delta : y= x+\dfrac{1}{4}$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 :

I) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Etudier la limite de f en -1. Interpréter graphiquement le résultat.
2) Montrer que la droite D : y=x+1 est une asymptote à ($\mathscr{C}$) au voisinage de $-\infty$. Etudier la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à D.
3) Montrer que f est dérivable en tout réel a de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et que $f'(a)=\dfrac{a^2+2a-3}{(a+1)^2}$
4) Soit A et B deux points de($\mathscr{C}$) d'abscisses respectives 0 et 3. Ecrire les équations des tangentes à ($\mathscr{C}$) parallèles à (AB).

II) Soit g la fonction définie *par* $\begin{cases} g(x)=f(x), si\, x\in]-\infty,0[\\ g(x)=x+3+\sqrt{\dfrac{x+4}{x+1}}\, si\, x\in[0,+\infty[\end{cases}$. On désigne par($\Gamma$) la courbe représentative de g dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de g.
2) Montrer que g est continue en 0.
3) Etudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
4) Montrer que la droite Δ : y=x+4 est une asymptote à (Γ) au voisinage de (.$+\infty$)

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3-2x^2-x+2$. On note $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan .

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$. En déduire $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(-2+2t)-f(-2)}{t}$.
2) Déterminer les points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à D : 3x-y+α=0 où $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour quelle valeur de α D est-elle tangente à $\mathscr{C}$?
3) Déterminer le nombre des tangentes à $\mathscr{C}$ issus du point I(3,-1).
4) Soit la fonction g définie par $g(x)=|x^2-x|\times f(x)$. Montrer que g est dérivable en 1.
5) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x)=f(x) & si\ x\le 1 \\ h(x)=\sqrt{x^2+3}+ax & si\ x>1 \end{cases}$

a) Déterminer a pour que h soit continue en 1 puis calculer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{h(x)}{x}$ et de $(h(x)+2)$.

b) Montrer que $\forall\, a\in\mathbb{R}$, h n'est pas dérivable en 1.

Exercice 5 :

1) On pose $f(x)=\sqrt{2x+4}$, $x\in[2,+\infty[$. $\mathscr{C}_f$ étant la courbe de f .

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Soit $x_0\in]2,+\infty[$. Calculer $f'(x_0)$. En déduire le point de $\mathscr{C}_f$ où la tangente est perpendiculaire à la droite D d'équation $2x+y-1=0$.

2) Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = -x^2 + ax + \frac{1}{2} & si\ x \in]-\infty -1] \\ g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} & si\ \ x \in]-1, 2[\\ g(x) = 1 - \frac{x}{2} + f(x) & si\ \ x \in [2, +\infty[\end{cases}$

a) Trouver Dg.
b) Déterminer a pour que g soit continue en -1.
c) Etudier la continuité de g.

On prend dans la suite a = $-\frac{1}{2}$

3) Montrer que g est dérivable en -1 et écrire une équation de la tangente T au point d'abscisse -1. Etudier la position relative de $\mathscr{C}$g et T.

4) a) Soit $x_0 \in]-\infty,-1[$. Déterminer g' (x_0) puis écrire une équation de la tangente t a $\mathscr{C}$g au point d'abscisse x_0.

b)Soit b$\in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des réels b pour qu'il existe une seule tangente a $\mathscr{C}$g

c) passant par le point A(0,b).